

地盤と杭の剛性比および杭下端の地盤反力を考慮したモノパイル基礎の荷重と変形を予測するための解析解の提案*

An analytical model for prediction of loads and displacements of a monopile foundation considering stiffness ratio of soil to pile and ground reaction force at pile tip

石原 孟** Takeshi ISHIHARA 桑代 和樹*** Kazuki KUWASHIRO 難波 治之** Haruyuki NAMBA

1. はじめに

着床式洋上風力発電設備支持構造物のうち、モノパイル基礎は多く使われている。モノパイルの細長比が3~6程度であるため、設計時には長杭と異なり、杭と地盤の剛性比および杭の細長比に加え、杭下端における地盤反力の影響を考慮する必要がある。また、風と波による疲労荷重を評価するために、風車と基礎の連成解析に必要な Sway-Rocking モデル (SR モデル) の剛性マトリックスを高精度に評価する必要がある。

弾性地盤に支持された弾性梁の解析解は、Hayashi (1921)¹⁾により最初に導かれ、その後有限長の弾性梁の解析解が Hetenyi (1946)²⁾により導かれた。有限長の杭を対象に杭下端自由と固定の場合における弾性杭の解析解は Poulos と Davis (1980)³⁾により提案されたが、任意の杭下端の地盤反力を考慮できないため、通常杭の細長比が 10 以上の長杭に適用された。最近、Takahashi ら(2022)⁴⁾は、モノパイルを剛の杭と仮定し、杭下端の地盤反力を考慮した有限長さの杭の解析解を導出したが、杭の弾性が考慮されていないため、杭の変形および荷重の分布を正確に予測できない。さらに、Kamata と Takahashi (2021)⁵⁾はモノパイルについての FEM 解析により地盤と杭の剛性比および杭の細長比が SR モデルの剛性マトリックスに与える影響を評価した。この解析では杭下端の地盤反力を考慮したが、解析解が導出されていない。

そこで、本研究では、まず地盤と杭の剛性比および杭下端の地盤反力を同時に考慮できるモノパイル基礎の解析解を導出し、FEM 解析の結果と比較することにより、その予測精度を検証する。そして、導出した解析解を用いて、杭と地盤の剛性比および杭の細長比が、杭の変形と荷重の鉛直分布に与える影響を明らかにする。最後に、導出した解析解を用いて SR モデルの剛性マトリックスを解析的に求め、従来の解析解による計算結果と比較することにより地盤と杭の剛性比および杭の細長比の影響を評価する。

2. 解析解の導出

2.1 杭下端の地盤反力を考慮した有限長の杭の解析解

Fig.1 には杭頭(海底面高さ)と下端にそれぞれ水平力 H_h と H_b および曲げモーメント M_h と M_b が作用する有限長 L の杭を示す。弾性杭の単位長さあたりの地盤反力と水平変位との関係は、水平地盤反力係数 k_h および杭の直径 D を用いて式(1)により表される。

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + k_h D y = 0 \quad (1)$$

ここで、 y は杭の水平変位、 EI は杭の曲げ剛性、 $k_h D$ は杭の単位長さ当たりの水平地盤ばね剛性である。水平方向に力が作用するときの杭の水平変位の支配方程式(1)は地盤と杭の剛性比からなるパラメータ $\beta = \sqrt[4]{k_h D / (4EI)}$ を用いて、以下のように書き直せる。

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + 4\beta^4 y = 0 \quad (2)$$

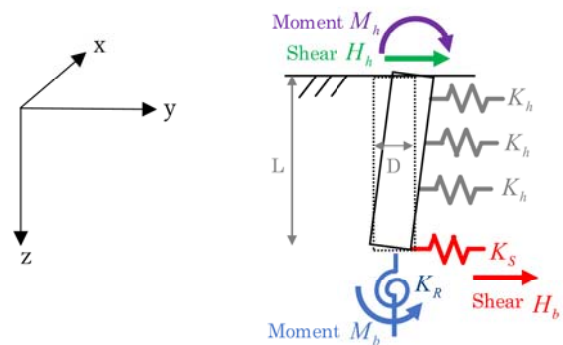


Fig.1 Coordinates and forces of a monopile

回転角 $\theta(z)$ 、曲げモーメント $M(z)$ 、せん断力 $Q(z)$ は杭の水平変位 y の関数として表される。有限長の杭の深さ z における水平変位 $y(z)$ の解析解は、式(2)に対して杭上端と下端における境界条件を与えることにより、Poulos と Davis (1980)³⁾により示され、杭下端が自由端とした場合の解を導いた。

Fig.1 に表す杭上端に外力 H_h と M_h および杭下端に地盤反力 H_b と M_b が作用する場合に、杭の変位 y 、 θ と荷重 M 、 Q は式(3)~式(6)に示すように 4 つの項の和

*令和 5 年 12 月 1 日 第 45 回風力エネルギー利用シンポジウムにて講演
**会員 東京大学大学院工学系研究科
***学生会員 東京大学大学院工学系研究科

により表される。

$$y(z) = y_{h1}(z) + y_{h2}(z) + y_{b1}(z) + y_{b2}(z) \quad (3)$$

$$\theta(z) = \theta_{h1}(z) + \theta_{h2}(z) + \theta_{b1}(z) + \theta_{b2}(z) \quad (4)$$

$$M(z) = M_{h1}(z) + M_{h2}(z) + M_{b1}(z) + M_{b2}(z) \quad (5)$$

$$Q(z) = Q_{h1}(z) + Q_{h2}(z) + Q_{b1}(z) + Q_{b2}(z) \quad (6)$$

ここで、添え字 h は杭頭に力が作用する場合、 b は杭下端に力が作用する場合、 1 は作用力が水平力 H である場合、 2 は作用力がモーメント M である場合を示す。本研究では、杭下端における地盤反力 H_b と M_b を考慮するため、杭頭が自由として、杭下端に水平力 H_b が作用する場合および杭下端に曲げモーメント M_b が作用する場合の解析解をそれぞれ導出した。

杭下端が自由の場合に対して、海底面高さにおける水平荷重 H_h が作用するとき、水平変位 y 、回転角度 θ 、モーメント M 、せん断力 Q は式(7)～式(10)のように表される。

$$y_{h1}(z) = 2H_h\beta/(k_hD) \cdot \phi C_{Hy}(z) \quad (7)$$

$$\theta_{h1}(z) = 2H_h\beta^2/(k_hD) \cdot \phi C_{H\theta}(z) \quad (8)$$

$$M_{h1}(z) = -H_h/\beta \cdot \phi C_{HM}(z) \quad (9)$$

$$Q_{h1}(z) = -H_h\phi C_{HQ}(z) \quad (10)$$

また、海底面高さにおけるモーメント M_h が作用するときの解は式(11)～式(14)により表される。

$$y_{h2}(z) = -2M_h\beta^2/(k_hD) \cdot \phi C_{My}(z) \quad (11)$$

$$\theta_{h2}(z) = 4M_h\beta^3/(k_hD) \cdot \phi C_{M\theta}(z) \quad (12)$$

$$M_{h2}(z) = -M_h\phi C_{MM}(z) \quad (13)$$

$$Q_{h2}(z) = 2M_h\beta\phi C_{MQ}(z) \quad (14)$$

ここで、 ϕ 、および $C_{xx}(z)$ は Table 1 に示す。添え字 xx は杭先端に作用する荷重 (H または M) および杭の変位と荷重 (y 、 θ 、 M 、 Q) を表す。

Table 1 Description of terms in Eqs.(7)-(14)

Term	Description
ϕ	$1/(\sinh^2 \beta L - \sin^2 \beta L)$
$C_{Hy}(z)$	$\sinh \beta L \cos \beta z \cosh \beta(L-z) - \sin \beta L \cosh \beta z \cos \beta(L-z)$
$C_{H\theta}(z)$	$\sinh \beta L \{\sin \beta z \cosh \beta(L-z) + \cos \beta z \sinh \beta(L-z)\} + \sin \beta L \{\sinh \beta z \cos \beta(L-z) + \cosh \beta z \sin \beta(L-z)\}$
$C_{HM}(z)$	$\sinh \beta L \sin \beta z \sinh \beta(L-z) - \sin \beta L \sinh \beta z \sin \beta(L-z)$
$C_{HQ}(z)$	$\sinh \beta L \{\cos \beta z \sinh \beta(L-z) - \sin \beta z \cosh \beta(L-z)\} - \sin \beta L \{\cosh \beta z \sin \beta(L-z) - \sinh \beta z \cos \beta(L-z)\}$
$C_{My}(z)$	$\sinh \beta L \{\sin \beta z \cosh \beta(L-z) - \sinh \beta(L-z) \cos \beta z\} + \sin \beta L \{\sinh \beta z \cos \beta(L-z) - \cosh \beta z \sin \beta(L-z)\}$
$C_{M\theta}(z)$	$\sinh \beta L \cosh \beta(L-z) \cos \beta z + \sin \beta L \cosh \beta z \cos \beta(L-z)$
$C_{MM}(z)$	$\sinh \beta L \{\cos \beta z \sinh \beta(L-z) + \sin \beta z \cosh \beta(L-z)\} - \sin \beta L \{\sinh \beta z \cos \beta(L-z) + \cosh \beta z \sin \beta(L-z)\}$
$C_{MQ}(z)$	$\sinh \beta L \sin \beta z \sinh \beta(L-z) + \sin \beta L \sinh \beta z \sin \beta(L-z)$

下端に水平力 H_b が作用する場合の解析解は式(15)～式(18)のように表される。

$$y_{b1}(z) = 2H_b\beta/(k_hD) \phi C_{Hy}(L-z) \quad (15)$$

$$\theta_{b1}(z) = 2H_b\beta^2/(k_hD) \phi C_{H\theta}(L-z) \quad (16)$$

$$M_{b1}(z) = (H_b/\beta) \phi C_{HM}(L-z) \quad (17)$$

$$Q_{b1}(z) = H_b \phi C_{HQ}(L-z) \quad (18)$$

また、下端に曲げモーメント M_b が作用する場合の解析解は式(19)～式(22)のように表される。

$$y_{b2}(z) = 2M_b\beta^2/(k_hD) \phi C_{My}(L-z) \quad (19)$$

$$\theta_{b2}(z) = 4M_b\beta^3/(k_hD) \phi C_{M\theta}(L-z) \quad (20)$$

$$M_{b2}(z) = M_b \phi C_{MM}(L-z) \quad (21)$$

$$Q_{b2}(z) = 2M_b\beta \phi C_{MQ}(L-z) \quad (22)$$

ここで、 $C_{xx}(L-z)$ は Table 1 に示す $C_{xx}(z)$ に $L-z$ を代入して求める。

杭下端反力 H_b および M_b は未知であり、既知の杭下端の水平地盤ばね係数 K_s および回転地盤ばね係数 K_R を用いて以下のように表せる。

$$H_b = -K_s \cdot y(L) \quad (23)$$

$$M_b = -K_R \cdot \theta(L) \quad (24)$$

H_h のみ作用 ($M_h = 0$) のときにおける杭下端の $y(L)$ 、 $\theta(L)$ を $y_1(L)$ 、 $\theta_1(L)$ とし、式(7)、式(8)、式(15)、式(16)、式(19)、式(20)および杭下端の水平地盤ばね係数 K_s および回転地盤ばね係数 K_R を含む式(23)と式(24)を式(3)と式(4)に代入すれば、連立方程式(25)が得られる。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(L) \\ \theta_1(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E \\ F \end{Bmatrix} \quad (25)$$

また M_h のみ作用 ($H_h = 0$) のときにおける杭の下端 $y(L)$ と $\theta(L)$ を $y_2(L)$ 、 $\theta_2(L)$ とし、式(11)、式(12)、式(15)、式(16)、式(19)、式(20)および杭下端の水平地盤ばね係数 K_s および回転地盤ばね係数 K_R を含む式(23)と式(24)を式(3)と式(4)に代入すれば、連立方程式(26)が導出される。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2(L) \\ \theta_2(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G \\ H^* \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、 A から H^* は係数であり、杭直径 D と水平力の H と区別するために、 D^* と H^* と記した。係数 A から H^* は以下のように表される。

$$A = k_h D + 2K_s \beta \phi C_{Hy}(0), \quad B = 2K_R \beta^2 \phi C_{My}(0)$$

$$C = -2K_s \beta^2 \phi C_{H\theta}(0), \quad D^* = k_h D + 2K_R \beta^2 \phi C_{M\theta}(0)$$

$$E = 2\beta \phi C_{Hy}(L) H_h, \quad F = 2\beta^2 \phi C_{H\theta}(L) H_h$$

$$G = -2\beta^2 \phi C_{My}(L) M_h, \quad H^* = 4\beta^3 \phi C_{M\theta}(L) M_h$$

連立方程式(25)と(26)を解くことにより、 $y_1(L)$ 、 $\theta_1(L)$ 、 $y_2(L)$ 、 $\theta_2(L)$ を求め、 H_h と M_h が同時に作用

するときの変位と回転角は $y_1(L)+y_2(L)$ と $\theta_1(L)+\theta_2(L)$ になり、式(27)および式(28)により求まる。

$$y(L) = (D(E+G) - B(F+H^*)) / (AD^* - BC) \quad (27)$$

$$\theta(L) = (-C(E+G) + A(F+H^*)) / (AD^* - BC) \quad (28)$$

以上のように、式(27)と式(28)により杭下端の $y(L)$ と $\theta(L)$ が求まれば、杭下端の H_b と M_b が式(23)と式(24)により求まる。その結果、式(3)～式(6)により、杭頭に荷重 H_h と M_h が作用した時に杭下端の地盤反力を考慮した有限長の杭の解析解が導出された。

2.2 SR モデルの剛性マトリックスの導出

着床式の風力発電設備は地盤に支持されており、風や波といった外力が風車に作用し、支持構造物を通して地盤へ影響を与えると共に、地盤反力も支持構造物を通して風車へ影響を与える。そのため地盤と支持構造物の相互作用を考慮する必要がある、風車設計においてはSRモデルがよく用いられる。Fig.2にはSRモデルを示し、モノパイルと地盤の効果は水平ばね、回転ばねおよび水平と回転の相互作用ばねにより表す。

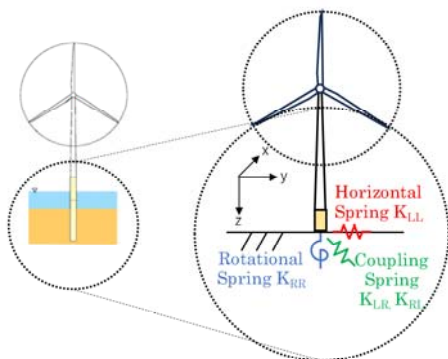


Fig.2 Sway-rocking model for a wind turbine

杭頭（海底面高さ）における水平ばねと回転ばねは海底面における水平力 H_h 、モーメント M_h と水平変位 y 、回転角 θ の関係の式 (29) に示す剛性マトリックスにより表される。

$$\begin{Bmatrix} H_h \\ M_h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (29)$$

上式の 2×2 の剛性マトリックスは単位水平力を杭頭に作用させたときの杭頭変位 $y_1(0)$ 、 $\theta_1(0)$ 、および単位モーメントを杭頭に作用させたときの杭頭変位 $y_2(0)$ 、 $\theta_2(0)$ を要素として作られる柔性マトリックス I の逆行列として式 (30) により与えられる。

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{LL} & I_{LR} \\ I_{RL} & I_{RR} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ \theta_1(0) & \theta_2(0) \end{bmatrix}^{-1} \quad (30)$$

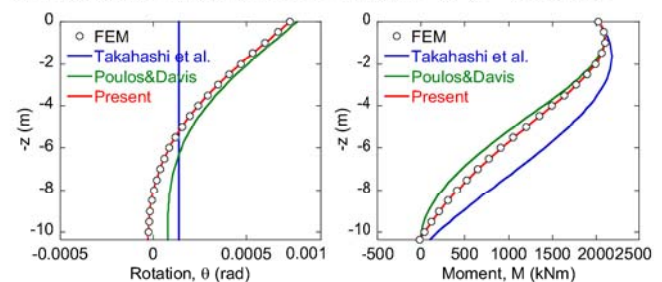
$$= \frac{1}{y_1(0)\theta_2(0) - y_2(0)\theta_1(0)} \begin{bmatrix} \theta_2(0) & -y_2(0) \\ -\theta_1(0) & y_1(0) \end{bmatrix}$$

3. 解析解の検証

剛性が一様の地盤を対象に、地盤と杭の剛性比および杭長比をパラメータとしてケーススタディを行った。杭下端の水平ばねと回転ばねは Wang と Ishihara (2022) の方法により評価し、杭の変形および荷重は 1 次元ビームモデルによる FEM 解析により求めた。

3.1 モノパイルの荷重と変形の解析解の検証

Fig.3 には導出した解析解による計算結果と 1 次元ビームモデルによる計算結果との比較を示す。また比較のために、従来の解析解による計算結果とも比較した。Takahashi ら (2022) は杭の弾性変形を考慮していないため、杭長にわたり θ を過小評価し、 M を過大評価している。一方、Poulos と Davis (1980) は杭下端の地盤反力を考慮していないため、杭下端付近における変位 θ と M を過小に評価している。地盤と杭の剛性比および杭下端の地盤反力を同時に考慮した本解析解による計算結果は FEM の結果とよく一致した。

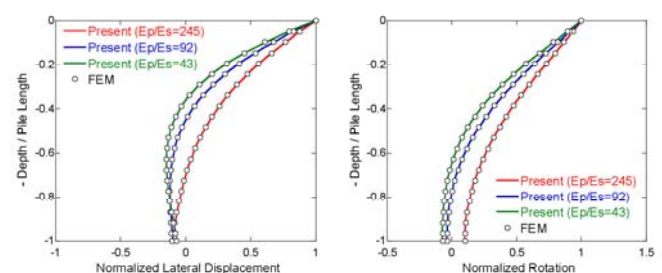


(a) Rotation (b) Bending moment

Fig.3 Comparison of FEM and theoretical solutions

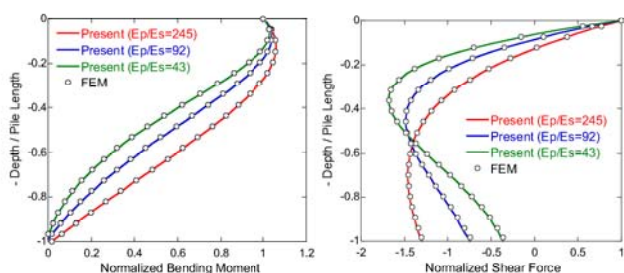
次に、導出した解析解を用いて地盤と杭の剛性比が杭の変形と荷重に与える影響を調べた。杭の等価ヤング係数 E_p を一定とし、地盤のヤング係数 E_s を系統的に変化させたときの変形と荷重の鉛直分布を求め、Fig.4 に示した。地盤が軟らかい場合に杭下端の地盤反力の影響が大きくなり、地盤が硬い場合に杭の弾性変形の影響が大きくなるのがわかる。なお、本研究では E_p は中空円筒の曲げ剛性 EI と等価になる中実円柱のヤング率であり、式(31)により表す。

$$E_p = EI / (\pi D^4 / 64) \quad (31)$$



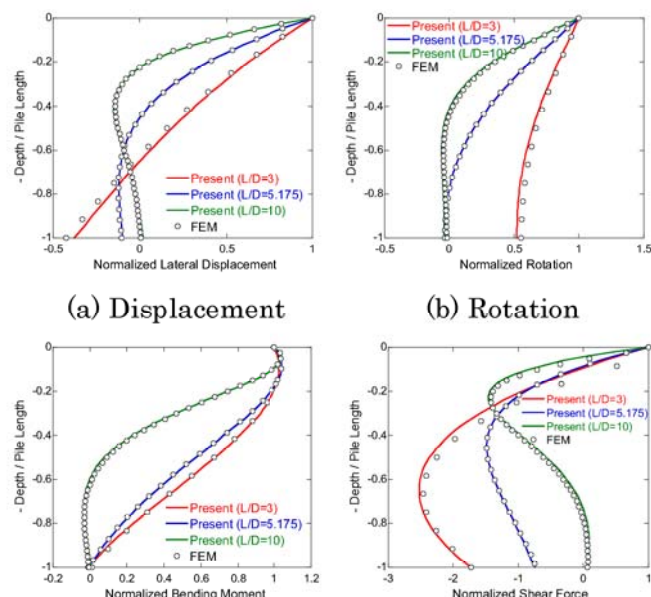
(a) Displacement

(b) Rotation



(c) Bending moment (d) Shear force
Fig.4 Effect of E_p/E_s ratio on the pile responses

最後に、 D を一定とし、杭長 L を変化させたときの变形と荷重の鉛直分布を求め、Fig.5に示した。杭が短い場合に杭下端の地盤反力の影響が大きくなり、杭が細長い場合に杭の弾性変形の影響が大きくなるのがわかる。



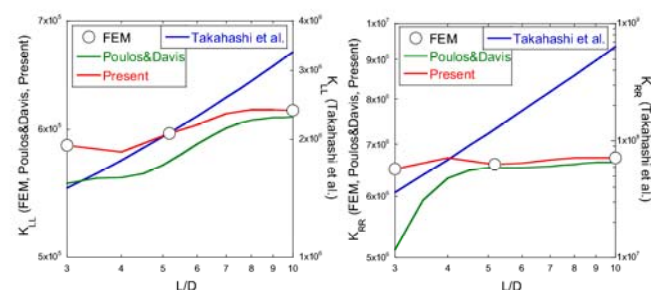
(a) Displacement (b) Rotation
(c) Bending moment (d) Shear force
Fig.5 Effect of L/D ratio on the pile responses

3.2 SR モデルの剛性マトリックスの導出

導出した解を用いて SR モデルの剛性マトリックスを評価し、水平ばね K_{LL} と回転ばね K_{RR} を Fig.6 に示した。

杭を剛と仮定した Takahashi ら (2022) ⁴⁾ の解析解により求めた SR モデルの水平ばね K_{LL} と回転ばね K_{RR} は杭の弾性変形を考慮していないため、FEM による値より一桁が大きい。一方、Poulos と Davis (1980) ³⁾ の解析解の剛性は、 L/D が大きくなるにつれ、杭下端の地盤反力の影響が小さくなり、解析解による求めた水平ばね K_{LL} と回転ばね K_{RR} は FEM の値に漸近する。これは杭の細長比が小さい場合、杭下端の地盤反力の影響を無視できないことによるものである。地盤と杭の剛性比および杭下端の地盤反力を同時に考慮し

た本解析解による計算結果はいずれの杭の細長比において FEM の結果とよく一致した。



(a) K_{LL} (b) K_{RR}
Fig.6 Comparison of SR spring stiffnesses

4. まとめ

本研究では、地盤と杭の剛性比と杭下端の地盤反力を考慮した解析解を導出し、以下の結論が得られた。

- 1) 地盤と杭の剛性比および杭下端の地盤反力を考慮したモノパイルの解析解は、従来の解析解に比べ、FEM の解析結果とよい一致を示した。
- 2) 本研究から導出した解析解を用いて杭の变形と荷重の鉛直分布を調べた。その結果、地盤が軟らかい又は杭が短い場合、杭下端の地盤反力の影響が大きく、地盤が硬い又は杭が細長い場合、杭の弾性変形の影響が大きいことを明らかにした。
- 3) 本研究から導出した解析解を用いて求めた SR モデルの剛性は、FEM の解析結果とよい一致を示したが、Poulos と Davis (1980) ³⁾ の解析解は、杭の細長比が小さい場合に杭下端の地盤反力の影響を無視できないことを示した。

参考文献

- 1) Hayashi, K., Theorie des tragers auf elastischer unterlage, Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen, Springer, Berlin, 1921
- 2) Hetenyi, M., Beams on elastic foundations. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946
- 3) Poulos, H. G., Davis, E. H., Pile Foundation analysis and design. John Wiley and Sons, New York, 1980
- 4) Takahashi, A., Omura, N., Kobayashi T., Kamata, Y., Inagaki, S., Centrifuge model tests on large-diameter monopiles in dense sand subjected to two-way lateral cyclic loading in short term, Soils and Foundations, 62(3), 101148, 2022
- 5) Kamata, Y., Takahashi, A., Sway-Rocking spring system applicable to short rigid monopile foundations, Geotech Geol, 39, 3065-3079, 2021
- 6) Wang, L., Ishihara, T., A semi-analytical one-dimensional model for offshore pile foundations considering effects of pile diameter and aspect ratio, 250, 110874, Ocean Engineering, 2022