

直接数値計算による任意波状境界をもつ2次元及び 3次元波状曲面上の流れの解析

Numerical Study on 2-D and 3-D Flows over Wavy Surface
with Arbitrary Shaped Boundary

孟 岩* 奥村卓也** 日野幹雄***

By Yan MENG, Takuya OKUMURA, Mikio HINO

A numerical study on the 2D and 3D flows over wavy surface with arbitrary shaped boundary has been performed by applying a higher-order upwind scheme and the orthogonal mesh generating technique. In the 2-D cases, we first simulated flows over the sinusoidal solid surface. Numerical results agree reasonably well with the analytical solutions derived by the perturbation method. In the second the flows over dune-shaped solid surface were calculated and the velocity and shear-stress distributions as well as vorticity component ω_z were well predicted. Finally, a flow over the double-sinusoidal surface was simulated via the same scheme and the 3D motions of the fluid on the wavy surface were clarified.

Keywords : Direct simulation, higher-order upwind scheme, orthogonal mesh generating technique, 2D & 3D flows over wavy surface, sinusoidal & dune-shaped solid surface, velocity and shear stress distribution.

1. はじめに

河床波の発生機構に関する研究は、Kennedy¹⁾(1963)がポテンシャル理論に基づく解析方法を発表して以来、多くの研究者によって精力に進められてきた。河床不安定理論としてはKennedy(1963)、林(1970)²⁾などの研究があり、局所的な流砂量と波面との間に位相差が存在し、河床波の発生の原因であることがこれらの理論によって初めて明らかにされた。ただし、ポテンシャル理論から直接位相差を決定することはできず予めそれを仮定している。一方、Benjamin(1959)³⁾は河床波の発生に及ぼすせん断応力の分布に着目し、波面境界上の半無限深さの層流を解析し、波面形状とせん断応力分布の間に位相差が存在することを示した。その後、Hsuら(1971)⁴⁾は波状円管内の空気流を測定し、乱流の場合にも位相差が存在することを確認した。日野・宮永(1977)⁵⁾は正弦波状境界をもつ2次元管路での定常な層流を考え、無次元波数 $\kappa (=h/L$ 、 h : 管の平均高さ、 L : 波面の波長)により基礎方程式を摂動展開し、この位相差を求め、また河床波発達におけるせん断応力分布の位相差の役割について論じた(日野、1975)⁶⁾。また最近、山田・大前(1991)⁷⁾は、日野・宮永の方法を更に発展させ、相対波高 $\varepsilon (=a/h$ 、 a : 波面の振幅)の変化を考慮できる解析を行い、より高い精度で位相差を求めた。また、論文の中には、レイノルズ数の小さい場合の前後非対称性をもつ河床波上の流れの解析についても試みた。

、、* 学生員 東京工業大学・大学院生

、、* 正会員 東京工業大学工学部土木工学科

(〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)

発達した河床波上の流れに関しては従来、実験的な研究が多く行われてきたが、十分に発達した砂漣の形が前後非対称となり、砂漣の背後には剝離域が生じているため、理論的に解析することが極めて困難である。そのために、河床波の発生・発達全過程における波面上の流れに関する統一的な解析はほとんど行われておらず、砂漣の発生・発達及び安定形状についてはいまだ不明の点が多い。そこで、本研究では、小規模河床波の発生・発達過程における波面上の流れを統一的に取り扱える数値計算コードを開発し、それを用いて、任意波状境界をもつ2次元または3次元波面上の流れ場を直接に解いて、波面上の流速及びせん断応力分布を解析した。なお、本数値計算には従来の解析と比較するために、日野・宮永の解析と同じように流れは自由表面の効果を取り入れていない管路流とした。

2. 計算方法

2.1 基礎方程式及び計算スキーム

基礎方程式はMAC法に従い、ナビエーストックスの方程式、及びその両辺の発散をとり常に次の時間ステップで連続式を満たすように補正項を加えた圧力に対するポアソン方程式である。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = - \text{grad } p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\Delta p = - \text{div}(\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} + \frac{1}{\Delta t} \text{div } \mathbf{v} \quad (2)$$

ここで Re はレイノルズ数で、 Δt は(1)式を差分化する際の時間刻みである。時間微分についてはオイラーの前進差分表式を用いた。非線形項を除いたすべての空間微分は中心差分によって近似され、非線形項は河村ら(1985)⁸⁾により開発された3次精度の風上差分表式を用いた。具体的な表式は次式のようになる。

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = u_i(u_{i+2} - 2u_{i+1} - 9u_i - 10u_{i-1} + 2u_{i-2})/6\Delta x \quad (\text{for } u_i > 0,) \quad (3)$$

$$u_i(-u_{i+2} + 10u_{i+1} - 9u_i + 2u_{i-1} - u_{i-2})/6\Delta x \quad (\text{for } u_i < 0,)$$

境界条件は、壁面上では粘着条件、流れ方向及びスパン方向には周期条件を課した。壁面上での粘着条件を精密に満たすため、鉛直方向には壁に近づくにつれて細くなるような不等間隔格子を用いた。また、式(2)を解く場合、壁面上での圧力境界条件が必要となり、本研究では $\partial p / \partial n = 0$ という条件を与えた。

2.2 任意波状境界上の直交格子の生成と座標変換

任意波状境界をもつ波面上の流れを解析する場合に、波面に沿った直交座標系をとることが望ましい⁹⁾。なぜならば、壁表面の境界条件の多くが壁の法線方向に与えられているからである。図-1はその一つ例で、壁面上の圧力境界条件 $\partial p / \partial n = 0$ は壁面に直交している (n, s) 座標系では、 $p_1 = p_2$ (1次近似で、2次近似では 図-1 圧力境界条件 $p_1 = 4/3 p_2 - 1/3 p_3$) のように置き換えられるが、直交していない (x, y) 座標系では、 $p_1 = p'_2$ のように与えることができなくなる。2次元直交格子を生成するために、本研究ではRyskinら¹⁰⁾の方法を用いた。図-2(a)は初期グリッドを示しており、直交化した後のグリッドは図-2(b)のようになる。そこで、本研究では、図-2(b)のような複雑な領域を図-2(c)のような矩形領域に数学的に変換して、それから差分式を導いた。座標変換の詳細については文献¹¹⁾を参照されたい。

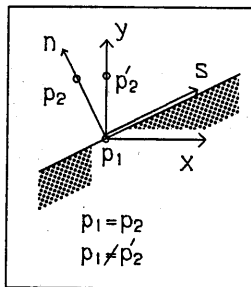
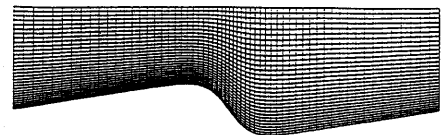
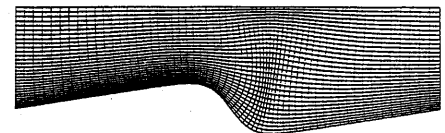


図-1 圧力境界条件 $p_1 = 4/3 p_2 - 1/3 p_3$ のように置き換えられるが、直交していない (x, y) 座標系では、 $p_1 = p'_2$ のように与えることができなくなる。2次元直交格子を生成するために、本研究ではRyskinら¹⁰⁾の方法を用いた。図-2(a)は初期グリッドを示しており、直交化した後のグリッドは図-2(b)のようになる。そこで、本研究では、図-2(b)のような複雑な領域を図-2(c)のような矩形領域に数学的に変換して、それから差分式を導いた。座標変換の詳細については文献¹¹⁾を参照されたい。

(a)初期グリッド



(b)直交後のグリッド



(c)変換後のグリッド



図-2 直交格子の生成と座標変換

3. 計算結果と考察

3.1 理論との比較

数値計算コードの妥当性を確かめるために、まず、日野・宮永が摂動法により求めた正弦境界上の流れの摂動解と比較する。図-3はその結果を示しており、破線は日野・宮永の解析解で、実線は本計算から得られた流速分布である（黒丸は日野・宮永の水素気泡法による測定結果）。本数値計算の結果と理論解はよく一致し、部分的に若干のずれは日野・宮永の摂動展開での高次項の打ち切り誤差によるものと考えられる。波面上の流れの流速分布の特徴としては一波長内の各断面における流速分布の形が流量を保存させるため、かなり変化していることが挙げられる。つまり面積の広い谷部に於いては速度分布が瘦せた形となり、クレストでは逆にせり出した形となる。

次に、計算条件を変えて河床形状とせん断力との位相差を求め、波状境界をもつ層流に関するより精度の高い山田・大前の摂動解と比較する。計算条件及び計算結果の詳細は3-2(a)に記述する。図-4はレイノルズ数 $Re = 100$ で、相対波高 $\varepsilon = 0.1, 0.3$ の場合での位相差 ϕ と無次元波数 κ の関係を示している。図中の実線は山田・大前の解析解から得られたもので、黒丸と黒三角は本数値計算の結果である。計算の結果と解析解とはよく一致しており、数値計算コードの妥当性を確かめた。

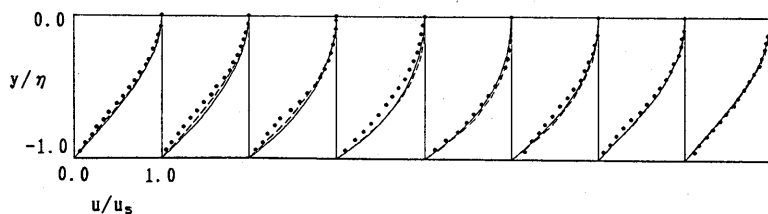


図-3 日野・宮永の近似解と本数値計算の結果の比較

3・2 2次元波面上の流れの流速とせん断応力分布

本計算では二次元波面として、正弦形境界とDune形境界を取り上げた。正弦形境界は河床波の発生初期の形を模擬し、Dune形境界は発達した砂漣の形を近似し前後非対称の形を取る。境界断面形状と本計算に用いた座標系を図-5に示す。流れ場は2次元であるため、メッシュ数はx方向に61、y方向に61、z方向に5点と取った。また、本研究で着目するせん断力 τ と渦度 ω_z は次式により計算した。

$$\tau_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

(a) 正弦形をした河床波上の流れ

計算条件は表1に示す通りであり、 U_0 は代表流速で、高さ h の平行平板間のポアズイユ流れの最大流速をとる。 U_m は断面平均流速を表している。また、計算中には無次元流量 Q が一定の値をとることを確認しながら計算を進めた。これはきわめて重要な点である。平均圧力勾配 $\partial p / \partial x$ は未知の値として計算から求める。

図-6は相対波高 $\varepsilon = 0.1$ の場合の計算結果を示しており、上からそれぞれ流速分布、拡大した流速分布、渦度のコンター、流線及び表面せん断応力の分布を示している。見やすくするために、図-6(a)のメッシュ数をx方向に21まで減らして流速ベクトル図を作った。相対波高 ε が小さい場合には、流れが剝離せずに正弦境界に沿って流れていく。壁面せん断応力の最大値は境界断面のクレストの上流側 $\phi = 22.0^\circ$ の所に現れる。

図-7は相対波高 $\varepsilon = 0.3$ の場合の計算結果で、流れがクレストの下流側で少し剝離している。渦度もクレスト

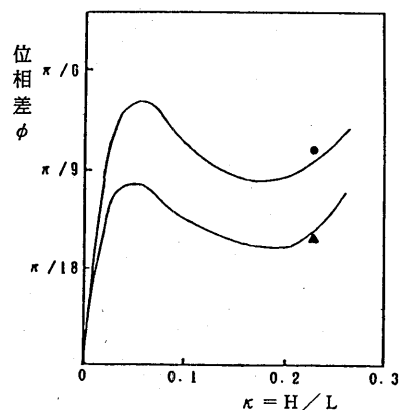


図-4 位相差 ϕ と無次元波数 κ の関係

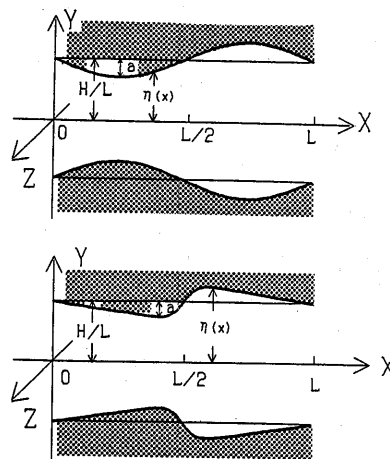


図-5 境界断面形状と座標系

	RUN-1	RUN-2
管の平均半径 $H = h/2$ (cm)	5.50	5.50
波長 L (cm)	24.00	24.00
振幅 a (cm)	0.55	1.65
無次元量		
$\kappa = H/L$	0.226	0.226
$\varepsilon = a/H$	0.1	0.3
$Re = U_0 \cdot H/\nu$	100	100
$Re_m = U_m \cdot h/\nu$	133.33	133.33
$Q = U_m \cdot h/U_0 \cdot H$	4/3	4/3

表-1 計算条件 (正弦形境界の場合)

ストの下流側で正の値をとり、せん断応力はその領域で少し負になっている。壁面せん断応力の最大値は、剥離の発生の有無にかかわらず、境界断面のクレストの上流側 ($\phi=13.0^\circ$) に現れ、位相差 ϕ の値は相対波高 $\varepsilon=0.1$ の場合と比べると小さくなっている。相対波高 ε の大きい場合には、せん断応力の絶対値が大きいため、砂連の発達を促進させると考えられる。

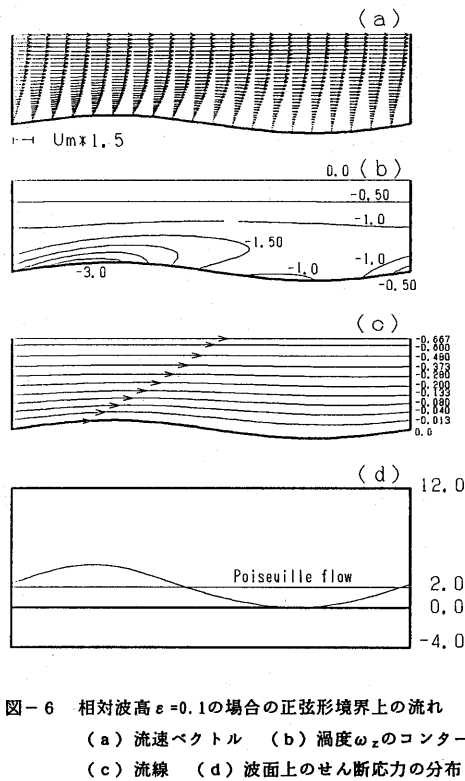


図-6 相対波高 $\varepsilon=0.1$ の場合の正弦形境界上の流れ
(a) 流速ベクトル (b) 渦度 ω_z のコンター
(c) 流線 (d) 波面上のせん断応力の分布

(b) DUNE形をした河床波上の流れ

次に、Dune形をした河床波上の流れを解析する。Dune形境界の断面形状は山田・大前により提案された次式で与える。

$$h(\xi) = 1 - \frac{A}{H} \cdot \frac{L}{t} \left[\left(\xi - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \tanh \left\{ \frac{L^2}{2\delta t} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (5)$$

式に含まれるパラメータ L 、 A 、 t 、 δ の値により境界形状を変化させることができる。計算条件は表2に示す通りで、これらの条件は従来の摂動法では扱えなかった領域である。

図-8は相対波高 $\varepsilon=0.1$ の場合の計算結果を示しており、正弦形境界の場合と同じように、流れが剥離せずにDune形境界に沿って流れていくことが分かる。壁面せん断応力の形は境界断面形状と似ており、切り立った形となっている。壁面せん断応力の最大値はクレストの少し上流側に現れる。

図-9は相対波高 $\varepsilon=0.3$ の場合の計算結果で、正弦形境界の場合と比べると、流れがクレストの下流側で大きく剥離し、流線も閉じた形となっている。渦度もクレストの下流側で正の値となり、せん断応力はその領域に大きい負の値をとる。壁面せん断応力の形は、かなり切り立った形となるが、山田・大前の

解析で現れた激しい変動がまったく出ていないことが分かる。また、壁せん断応力の値がクレストの下流側で負の値をとることは、Dune形砂連をさらにせり上げる効果があり、河床形状はさらに切り立っていき、最終的に、stepの様な極端な河床形状となることが予想される。実際の移動床に関する観察は山田・池内・植松¹²⁾の論文に論じられ、経時的な地形の変化は実験によって明らかになっている。この数値計算は、一定の水理条件と相対波高を与えた場合、正弦形砂連からDune形砂連へ発達していく過程の中の二つの段階での河床波面上の流れを解析したこととなる。この数値計算コードを使えば、砂連の経時的な変化を追って解析でき、小規模河床波の発生・発達過程における波面上の流れを統一的に取り扱える。

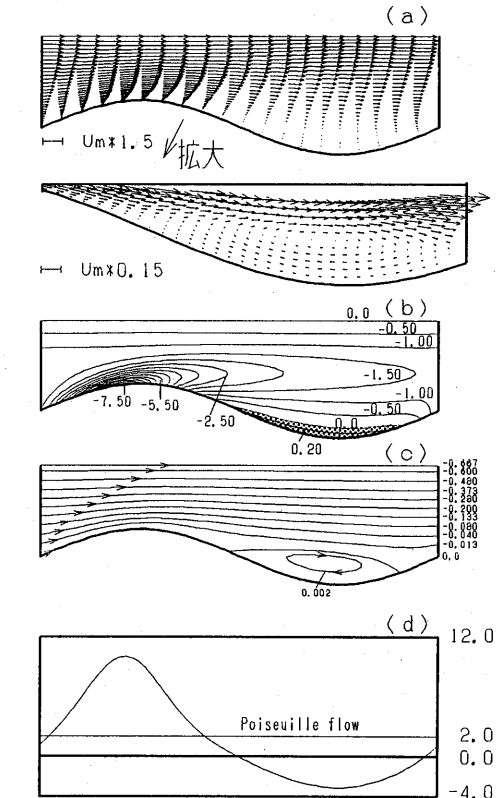


図-7 相対波高 $\varepsilon=0.3$ の場合の正弦形境界上の流れ
(a) 流速ベクトル (b) 渦度 ω_z のコンター
(c) 流線 (d) 波面上のせん断応力の分布

	RUN-3	RUN-4
管の平均半径 $H = h/2$ (cm)	5.50	5.50
波長 L (cm)	24.00	24.00
振幅 a (cm)	0.55	1.65
形状パラメータ		
A (cm)	0.25	0.75
δ (cm)	3.0	3.0
t (cm)	5.0	5.0
無次元量		
$\kappa = H/L$	0.226	0.226
$\varepsilon = a/H$	0.1	0.3
$Re = U_0 \cdot H / \nu$	100	100
$Re_n = U_n \cdot h / \nu$	133.33	133.33
$Q = U_n \cdot h / U_0 \cdot H$	4/3	4/3

表-2 計算条件 (Dune形境界の場合)

3・3 3次元波面上

上の流れとせん断力

最後に、2重正弦形をもつ3次元波面上の流れを解析し、3次元波面上の流れの特徴やせん断応力の分布を明らかにする。境界形状は林・片岡(1987)¹³⁾の論文を参考にして与えた。計算条件は表3に示す通りで、境界形状のパラメタは林・片岡¹³⁾の実験と同じ値を取った。3次元の場合、座標は流下方向のみならず横断方向にも境界に直交させる必要がある。そのため、2・1に記した直交手法を拡張し、xとz方向に別々に直交させるという2重直交方法を提案した。図-10は直交した後のグリッドを示している。図-11はこの複列正弦形河床波の波高コンターを示す。流下と横断方向に周期境界条件とし、流下と横断方向共に一波長分しか計算しない。また、メッシュ数はx方向に41、y方向に41、z方向に21点と取った。図-12は場所(I),(II),(III)でのXY断面内の速度u, vのベクトルを示しており、場所(I)と場所(III)での速度u, vベクトルは波面の変化に対応して変わっていることが分かる、つまり面積の広い谷部に於いては速度分布が瘦せた形となり、クレストでは逆に迫り出した形となる。場所(II)では流下方向の波面の変化がまったくないため、主流速uの鉛直分布は流下方向に同じ形を取り、流れ場は正しく計算されていることが分かる。図-13は壁面せん断応力のコンターを示しており、谷部ではせん断応力が小さく、クレストでは大きい値をとる。せん断応力の最大値は境界断面のクレストの少し上流側に現れ、3次元の場合でも波面形状とせん断応力分布の間に位相差が存在していることが分かる。図-14は各YZ断面内の速度v, wのベクトルを示しており、図-13と一緒に合わせて考えれば、壁面近傍の流れがクレストを回り込むように流れていることが分かる。図-14(h),(a),(b)は登り坂、(d),(e),(f)は下り坂での流れの挙動を示している。この流れは3次元河床波の形成に重要な役割を果たしていると考えられる。

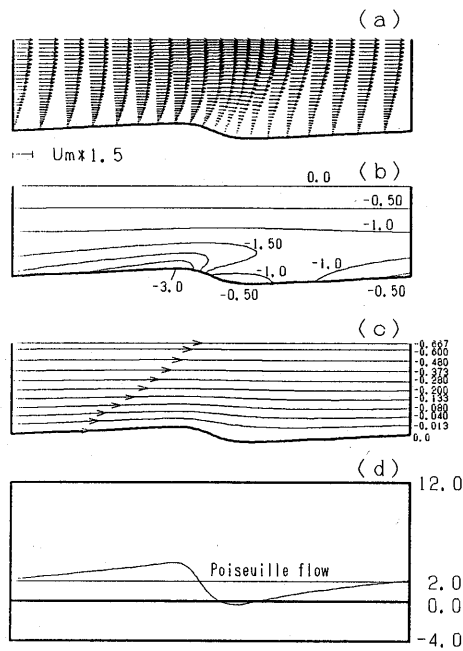


図-8 相対波高 $\epsilon = 0.1$ の場合のDune形境界上の流れ
(a) 流速ベクトル (b) 渦度 ω_z のコンター
(c) 流線 (d) 波面上のせん断応力の分布

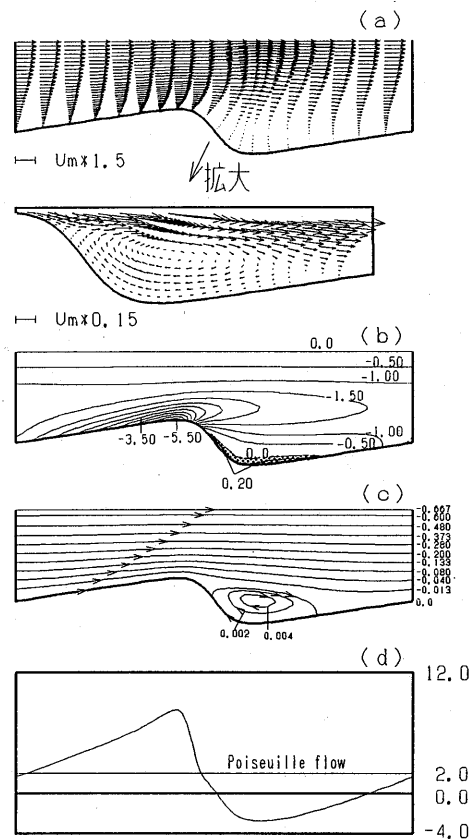


図-9 相対波高 $\epsilon = 0.3$ の場合のDune形境界上の流れ
(a) 流速ベクトル (b) 渦度 ω_z のコンター
(c) 流線 (d) 波面上のせん断応力の分布

		RUN-5
管の平均半径	$H = h/2$ (cm)	8.0
波長 x 方向	L_x (cm)	115.0
z 方向	L_z (cm)	26.67
振幅	a (cm)	1.68
無次元量		
	$\kappa_x = H/L_x$	0.0696
	$\kappa_z = H/L_z$	0.3
	$\epsilon = a/H$	0.21
	$Re = U_0 \cdot H/\nu$	100
	$Re_m = U_m \cdot h/\nu$	133.33
	$Q = U_m \cdot h/U_0 \cdot H$	4/3

表-3 計算条件 (3次元波面境界の場合)

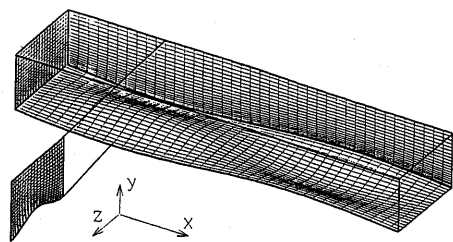


図-10 2重正弦形をもつ
3次元波面上の直交グリッド

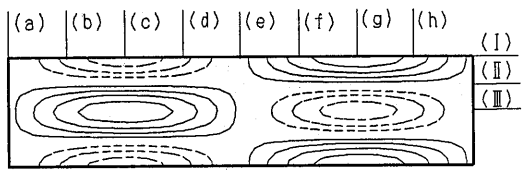


図-1 1 河床波の波高コンター

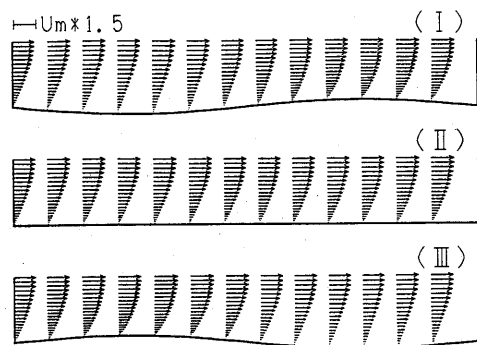


図-1 2 各X Y断面内の速度 u , v のベクトル図 (場所 (I), (II), (III))

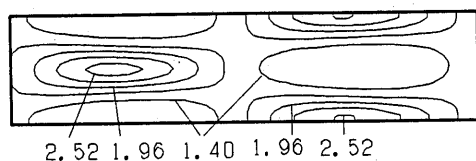


図-1 3 壁面せん断応力のコンター

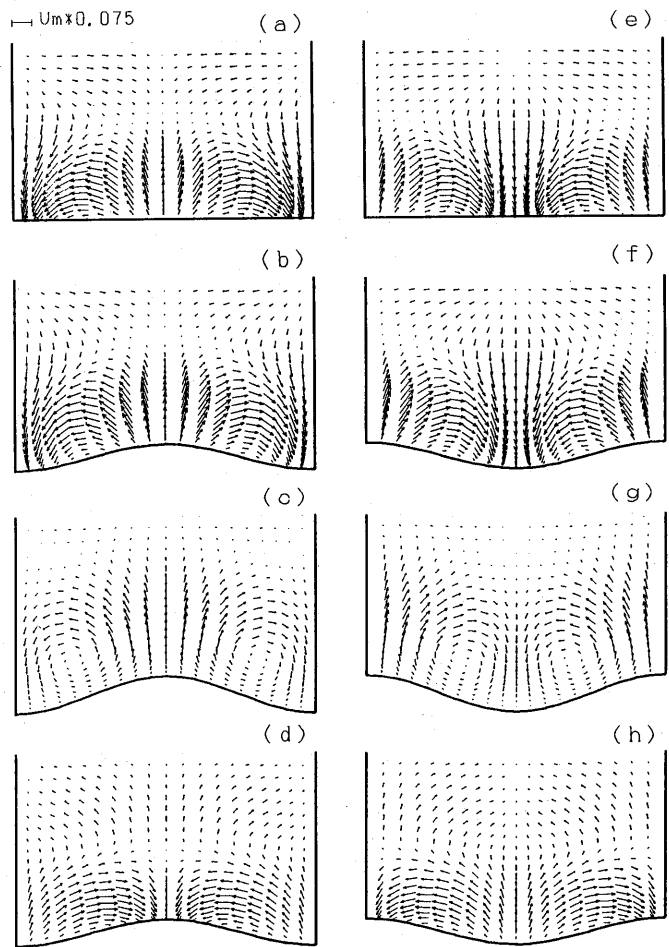


図-1 4 各Y Z断面内の速度 v , w のベクトル図

4. おわりに

本研究は、ナビエ・ストークス方程式を直接数値的に解くことにより、任意波状境界をもつ2次元及び3次元波面上の流れ場を層流域で解析した。計算結果は、正弦形境界をもつ2次元波面上の流れについて、従来の研究と同じ結論が得られ、また、従来の解析手法が取り扱えないDune形境界をもつ波面上の流れと3次元波面上の流れについても良い結果が得られた。この数値計算コードは、任意波面形状・任意レイノルズ数 Re での流れを解析できるという特徴を持っており、また計算精度の面でも、摂動展開による打ち切り誤差がまったく含まれていないため、摂動法による解析解に較べてより良い精度の計算が期待できる。今後、さらに実現象に対応する高レイノルズ数と乱流領域の流れについて研究を進めたいと考えている。

謝辞 本研究にあたり、岸弘之氏（運輸省・港湾局開発課）と神田学氏（東工大・助手）から有意な助言、また両氏が開発したDSコードを頂いたことを、記して深謝する。

参考文献 1) Kennedy, J.F. : J.F.M. (1963) 2) Hayashi, T. : Proc. ASCE. (1970). 3) Benjamin, T.B. : J. F. M. (1959). 4) Hsu, S.T & Kennedy, J.F. : J. F. M. (1971). 5) 日野幹雄・宮永洋一 : 土木学会論文報告集、(1977). 6) 日野幹雄 : 文部省科学研究費総合研究 (A) 最終報告書 (代表者岸力), (1975). 7) 山田正・大前智敬 : 土木学会論文集、第434号、(1991). 8) Kawamura, T. & Kuwahara, K. : AIAA-85-0376, 10pp. (1985). 9) 岸弘之 : 東京工業大学・修士論文 (1989). 10) Ryskin, G. and Deiwert, G. : J. Comput. Phys. (1983). 11) 日野・太田・砂田・渡辺 : 森下出版、(1989). 12) 山田・池内・植松 : 第31回水理講演会論文集、(1987). 13) 林泰造・片岡義明 : 第34回水理講演会論文集、(1987).